

### **III. Системы дифференциальных уравнений**

#### **Общая теория**

Основные понятия, определения

Векторная терминология и обозначения

Теорема существования и единственности для систем

#### **Линейные системы**

Как понимать линейность системы

Неоднородные системы

Однородные системы

Три вида линейной зависимости

Определитель Вронского

Теорема об общем решении однородной системы

#### **Формула Якоби. Матричное дифференциальное уравнение**

Формула Якоби

Матричное дифференциальное уравнение

Метод вариации произвольных постоянных и матричная функция Коши

#### **Первые интегралы и сопряженные системы. Квартет матричных дифференциальных уравнений**

Первые интегралы

Понятие первого интеграла

Первые интегралы линейных систем

Квартет матричных дифференциальных уравнений

#### **Однородные системы с постоянными коэффициентами**

Модификация метода Эйлера для систем

Случай простых корней

Случай кратных корней

#### **Метод неопределенных коэффициентов. Матричная экспонента**

Метод неопределенных коэффициентов

Матричная экспонента

#### **Автономные системы**

Понятие автономности

Фазовая плоскость и фазовое пространство

Фазовый портрет для математического маятника

Три типа фазовых траекторий

#### **Классификация особых точек**

Особые точки линейной системы

Случай вещественных собственных значений

Собственные значения одного знака, но различны<sup>^</sup>

Собственные значения разных знаков

Собственные значения совпадают

Случай комплексных собственных значений

Чисто мнимые собственные значения

Существенно комплексные собственные значения

Вырожденные случаи

Только одно собственное значение равно нулю

Оба собственных значения равны нулю

Особые точки нелинейных систем

#### **Первые интегралы**

Интегральная поверхность. Первые интегралы

Уравнение в частных производных

Функциональная зависимость и независимость интегралов

### **IV Устойчивость решений дифференциальных уравнений**

#### **Понятие устойчивости в дифференциальных уравнениях**

Обыденное и математическое представление об устойчивости

Формализация

Доводка до блеска

Точные определения

Устойчивость для систем уравнений

Устойчивость как научная проблема

**Устойчивость линейных систем. Спектральный признак устойчивости.**

**Критерий Рауса — Гурвица**

Линейные неоднородные системы

Линейные однородные системы

Спектральный критерий устойчивости для систем

Критерий Рауса - Гурвица

**Периодические системы**

Скалярное периодическое уравнение

Критерий устойчивости периодической системы

Связь критериев устойчивости для систем с постоянными и периодическими коэффициентами

Теорема Флоке

**Функция Ляпунова**

Понятие и определение

Теорема о функции Ляпунова

Модификации и обобщения

Глобальная устойчивость и теорема Барбашина Красовского

Неавтономные системы

Локальная устойчивость

Устойчивость периодических решений автономных систем

**Функция Ляпунова для систем с постоянными коэффициентами. Матричное уравнение Ляпунова**

Квадратичные формы и их свойства

Матричное уравнение Ляпунова

**Теорема об устойчивости по первому приближению. Функция Четаева**

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению

Обобщения и варианты

Дифференциальное уравнение Ляпунова

**Заключение**

**Приложения**

**Задачи, приводящие к системам дифференциальных уравнений**

Задачи механики

Движение материальной точки в поле силы притяжения

Таран

Двойной маятник

Уравнения баллистики

Движение спутника по орбите

Уравнения теории гироскопа

Задача трех тел

Задачи популяционной динамики

Задачи химической кинетики

Система Лоренца

Группы преобразований

Однопараметрические группы преобразований

Группы преобразований и системы дифференциальных уравнений

Исследование геометрических свойств преобразований

Нахождение группы как решения системы дифференциальных уравнений

Разрешимость вырожденных систем линейных алгебраических уравнений

Критерий Рауса — Гурвица

Случай  $n = 2$

Случай  $n = 3$

Некоторые формулировки с нестрогим неравенством

Уравнения в частных производных первого порядка

Понятия и определения

Линейные уравнения первого порядка

Двумерные уравнения

Простейший случай

Замена переменных

Уравнение с переменными коэффициентами. Характеристики

Трёхмерные и многомерные уравнения

Трёхмерное уравнение

Геометрическая интерпретация трёхмерного уравнения

Многомерные уравнения

Квазилинейные уравнения

Линейное неоднородное уравнение

Квазилинейное уравнение

Возвратимся к линейному неоднородному уравнению