

Введение

Модуль I

Теория сжимающих операторов

§ 1. Список основных пространств

§ 2. Метрические пространства

Понятие метрики

Примеры метрических пространств

§ 3. Сходимость в метрическом пространстве

§ 4. Сжимающие операторы

Принцип сжимающих операторов

Метод последовательных приближений, или простых итераций

§ 5. Приложение принципа сжимающих операторов к задаче приближенного решения уравнений

Числовые уравнения

Системы линейных алгебраических уравнений

Нелинейные функциональные уравнения

Интегральные уравнения Фредгольма

Интегральные уравнения Вольтерры

Модуль II

Теория рядов Фурье в гильбертовом пространстве

§ 6. Линейные пространства

Понятия линейного пространства и линейного подпространства

Линейно независимые системы

Размерность линейного пространства

§ 7. Нормированные пространства

Понятия нормы, полунормы и банахова пространства

Основные банаховы пространства

Другие попытки введения нормы

§ 8. Пространства со скалярным произведением

Понятия скалярного произведения и гильбертова пространства

Основные гильбертовы пространства

Весовые пространства Лебега

§ 9. Ортогональные системы

Процесс ортогонализации

Построение ортогональных многочленов

Лежандра, Чебышёва, Лагерра, Эрмита

§ 10. Полные системы

Понятия полной системы и ортогонального базиса

Полные системы и ортогональные базисы в пространствах Лебега

Тригонометрические системы

Полиномиальные системы

Системы ступенчатых функций

§11. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и задача аппроксимации

Разложение вектора по ортонормированной системе в конечномерном пространстве

Разложение вектора по ортонормированной системе в бесконечномерном пространстве.

Сходимость ряда Фурье

Приложение рядов Фурье к решению задач аппроксимации

§ 12. Замечания о сходимости рядов Фурье

Качество сходимости ряда Фурье

Сравнение тригонометрической и полиномиальной аппроксимации

Сравнение ряда Фурье и ряда Тейлора

Модуль III

Теория линейных операторов

§ 13. Линейные операторы

Понятие линейного оператора. Примеры

Линейные интегральные операторы

Фредгольма и Вольтерры

Линейные дифференциальные операторы, операторы Штурма — Лиувилля

§ 14. Обратный оператор

Понятие обратимости.

Критерий для линейных операторов

Обратимость линейных дифференциальных операторов второго порядка с начальными и граничными условиями

§ 15. Собственные числа и собственные векторы линейных операторов

Понятие собственного числа и собственного вектора

Собственные векторы симметричных операторов

Системы собственных функций для симметричных интегральных и дифференциальных операторов. Задача Штурма — Лиувилля

Применение собственных векторов для решения линейных уравнений

§ 16. Непрерывность операторов

Понятие непрерывности.

Критерий для линейного оператора

Непрерывность интегральных операторов Фредгольма

Условия непрерывности для линейных дифференциальных операторов

§ 17. Непрерывность обратного оператора

Понятие непрерывной обратимости.

Критерий для линейных операторов

Понятие устойчивости для решения операторного уравнения

Условия для положительной определенности операторов Штурма — Лиувилля

Условия для непрерывной обратимости интегральных операторов Фредгольма

§ 18. Оптимизация функционалов в гильбертовом пространстве

Теорема Рисса для линейных непрерывных функционалов

Дифференцирование и оптимизация функционалов

Метод Ритца для приближенной оптимизации функционалов

§ 19. Вариационный и проекционный подходы к приближенному решению линейных операторных уравнений

Вариационные методы

Функционал наименьших квадратов

Функционал энергии

Проекционные методы

Сходимость метода наименьших квадратов и метода Галёркина

Список литературы

Предметный указатель