

Предисловие к шестому изданию

Предисловие к пятому изданию

Введение

Глава I

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Комплексные числа и действия над ними

Понятие комплексного числа

Сложение и умножение комплексных чисел

Вычитание и деление комплексных чисел

§ 2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Теоремы о модуле и аргументе

Геометрическое изображение комплексных чисел

Геометрическое истолкование сложения и вычитания комплексных чисел

Понятие о модуле и аргументе

Теоремы о модуле и аргументе

Геометрическое изображение числа

Геометрическое построение произведения и частного комплексных чисел

§ 3. Пределы

Основной принцип теории пределов

Понятие предельной точки

Ограниченные и неограниченные последовательности комплексных чисел

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Понятие сходящейся последовательности комплексных чисел

Основные теоремы теории пределов

Критерий Коши

§ 4. Числовая сфера. Бесконечно удалённая точка

Изображение комплексных чисел на сфере. Бесконечно удалённая точка

Формулы стереографической проекции

Основное свойство стереографической проекции

Сохранение углов

§ 5. Ряды

Понятие сходящегося и расходящегося ряда

Необходимый признак сходящегося ряда

Понятие абсолютно сходящегося ряда

Сложение и вычитание рядов

Теорема о двойных рядах

Перестановка членов ряда

Умножение рядов

Упражнения к гл. I

Глава II

КОМПЛЕКСНОЕ ПЕРЕМЕННОЕ И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Функции комплексного переменного

Понятие функции комплексного переменного

Понятие области. Линия Жордана

Непрерывность функции комплексного переменного

Теорема о равномерной непрерывности. Лемма Гейне-Бореля

§ 2. Ряды функций

Понятие равномерно сходящегося ряда

Теорема о непрерывности суммы ряда

Признак равномерно сходящегося ряда

§ 3. Степенные ряды

Понятие области сходимости степенного ряда

Первая теорема Абеля
Круг сходимости
Понятие наибольшего предела
Определение радиуса сходимости
Равномерная сходимость степенного ряда
Вторая теорема Абеля

§ 4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Элементарные функции

Понятие производной
Понятие функции, аналитической в области
Понятие дифференциала
Условия Коши-Римана
Сопряжённые гармонические функции
Дифференцирование степенных рядов
Показательная функция. Функции тригонометрические и гиперболические
Однолистные функции. Обратные функции
Радикал, логарифм и арксинус
Ветви многозначных функций. Понятие о точках разветвления
Понятие о римановой поверхности

§ 5. Конформное отображение

Геометрический смысл аргумента производной
Геометрический смысл модуля производной
Конформное отображение
Конформное отображение II рода
Геометрический смысл дифференциала
Главная часть отображения $da = f'(z)dz$

Упражнения к гл. II

Глава III

ЛИНЕЙНЫЕ И ДРУГИЕ ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Линейная функция

Целая линейная функция
Функция z
Общая линейная функция
Круговое свойство линейной функции
Параметры и инвариант линейного преобразования
Отображение верхней полуплоскости в самоё себя
Инвариантность пары взаимно симметричных точек при линейном преобразовании
Отображение круга на верхнюю полуплоскость
Отображение круга самого в себя
Представление линейного преобразования посредством симметричных отображений
Различные типы линейных преобразований (ЛО)
Природа двойных точек
Геометрическая интерпретация эллиптического преобразования
Характер преобразования круга самого в себя

§ 2. Линейные преобразования и геометрия Лобачевского

Евклидово изображение на круге геометрии Лобачевского
Вычисление неевклидова расстояния двух точек с данными аффиксами
Неевклидова окружность
Неевклидова длина кривой
Неевклидова площадь
Горициклы
Гиперциклы
Евклидово изображение геометрии Лобачевского на полуплоскости
Неевклидова длина окружности

Угол параллелизма в геометрии Лобачевского
Неевклидовы площади круга и треугольника

§ 3. Некоторые элементарные функции и отображения, даваемые ими

Степенная функция и радикал

Показательная и логарифмическая функции

Упражнения к гл. III

Глава IV

ТЕОРЕМА КОШИ. ИНТЕГРАЛ КОШИ

§ 1. Интегралы по комплексному переменному

Понятие интеграла по комплексному переменному

Основные свойства интеграла по комплексному переменному

Интегрирование равномерно сходящегося ряда

Теорема Коши

§ 2. Теорема Коши 1;

Основная лемма

Приведение доказательства теоремы Коши к простейшему случаю

Доказательство теоремы Коши

Понятие неопределённого интеграла в комплексной области

Распространение теоремы Коши на случай сложных контуров

Логарифмическая функция

Лемма 1

Обобщение теоремы Коши

§ 3. Интеграл Коши

Формула Коши

Распространение формулы Коши на случай сложных контуров

Интеграл типа Коши

Существование производных всех порядков для функции, аналитической в области

Теорема Морера

Различные точки зрения в построении теории аналитических функций

О предельных значениях интеграла типа Коши

О предельных значениях интеграла типа Коши в случае, когда граничная функция удовлетворяет условию Гельдера-Липшица

Интеграл Пуассона

Упражнения к гл. IV.

Глава V

РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В СТЕПЕННЫЙ РЯД

§ 1. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций

Первая теорема Вейерштрасса

§ 2. Ряд Тейлора

Приложение теоремы Вейерштрасса к степенным рядам

Разложение аналитической функции в степенной ряд

Понятие голоморфной функции и его эквивалентность с понятием аналитической функции

Свойство единственности аналитических функций

Принцип максимального модуля

Нули аналитической функции

Порядок нуля

Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда

Теорема Лиувилля

Вторая теорема Вейерштрасса

Упражнения к гл. V

Глава VI

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Ряд Лорана

Разложение аналитической функции в ряд Лорана

Правильная и главная части ряда Лорана

Единственность разложения Лорана

§ 2. Классификация особых точек однозначной функции

Три типа изолированных особых точек

Устранимая особая точка

Полюс

Связь между нулём и полюсом

Существенно особая точка

Поведение функции в окрестности изолированной особой точки

§ 3. Поведение аналитической функции в бесконечности

Окрестность бесконечно удалённой точки

Разложение Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки

Поведение функции в окрестности бесконечно удалённой точки.

Условия обращения интеграла типа Коши в интеграл Коши

§ 4. Простейшие классы аналитических функций

Целые функции

Мероморфные функции

Разложение рациональной функции на простейшие дроби

Основная теорема алгебры

§ 5. Приложения к гидродинамике

Невихревой и свободный от источников поток жидкости

Характеристическая функция потока

Обтекание круглого цилиндра потоком без циркуляции

Чисто циркулярный поток

Общий случай

Упражнения к гл. VI

Глава VII

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ

§ 1. Общая теория вычетов

Вычет функции относительно изолированной особой точки

Основная теорема о вычетах

Вычисление вычета функции относительно полюса

Вычет функции относительно бесконечно удалённой точки

Вычисление интеграла

§ 2. Приложения теории вычетов

Основная теорема алгебры

Теорема Руше

Приложения теории вычетов к вычислению определённых интегралов

Разложение $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби

Упражнения к гл. VII

Глава VIII

ТЕОРЕМА ПИКАРА

§ 1. Предложение Блоха

Теорема об обращении голоморфной функции

Доказательство предложения Блоха

§ 2. Теорема Ландау

Доказательство теоремы Ландау

Малая теорема Пикара

§ 3. Неравенство Шоттки

Вывод неравенства Шоттки

Обобщённое неравенство Шоттки

§ 4. Общая теорема Пикара

Упражнения к гл. VIII.

Глава IX

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ ИХ К АНАЛИТИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

§ 1. Бесконечные произведения

Сходящиеся и расходящиеся бесконечные произведения

Основной критерий сходимости бесконечного произведения

Изображение голоморфной функции в виде бесконечного произведения

§ 2. Приложения бесконечных произведений к теории целых функций

Формула Вейерштрасса

Изображение целой функции в виде бесконечного произведения

Изображение мероморфной функции в виде отношения двух целых функций

Задача Миттаг-Леффлера

§ 3. Обобщение теоремы единственности аналитических функций

Возможные обобщения теоремы единственности аналитических функций

Формула Якоби и Иенсена

Доказательство теоремы единственности

Невозможность дальнейшего обобщения теоремы единственности для ограниченных функций

Упражнения к гл. IX

Глава X

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

§ 1. Принцип аналитического продолжения

Понятие аналитического продолжения

Понятие полной аналитической функции в смысле Вейерштрасса

Распространение функции действительного переменного на комплексную область по принципу аналитического продолжения

§ 2. Примеры

Примеры однозначных функций

Примеры многозначных функций

Упражнения к гл. X

Глава XI

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Общие свойства эллиптических функций

Определение эллиптической функции

Параллелограмм периодов

Основные теоремы

Эллиптические функции второго порядка

§ 2. Функции Вейерштрасса

Лемма

Функции a , E , и p

§ 3. Простейшие аналитические представления произвольной эллиптической функции

Представление эллиптической функции в виде суммы простейших элементов

Представление эллиптической функции в виде отношения произведений элементарных множителей

§ 4. Функции

§ 5. Эллиптические функции Якоби

§ 6. Функции θ

Разложение целой периодической функции

Функция θ

Функции θ_k

Свойства функций θ

§ 7. Представление эллиптических функций Якоби посредством функций θ

§ 8. Формулы сложения для эллиптических функций Якоби

Упражнения к гл. XI

Глава XII

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Условия, определяющие конформное отображение

Отображение единичного круга самого на себя

Условия, определяющие единственность конформного отображения

§ 2. Основные принципы теории конформного отображения

Принцип сохранения области

Принцип взаимно однозначного соответствия

Принцип симметрии Римана-Шварца

Обобщение принципа симметрии

Принцип Шварца аналитического продолжения

Принцип симметрии для гармонической функции

Приложение принципа симметрии

§ 3. Общие преобразования единичного круга во внутреннюю область

Аналитическое выражение голоморфной функции, преобразующей круг $|z| < 1$ во внутреннюю область

Лемма Шварца

Приложение леммы Шварца к оценке производной функции, удовлетворяющей условиям леммы

Общая форма леммы Шварца

Существование двойной точки преобразования

§ 4. Единственность аналитических функций

Однозначное определение аналитической функции по её граничным значениям

Обобщение теоремы единственности

§ 5. Конформные отображения на верхнюю полуплоскость областей, ограниченных линиями второго порядка

Равносторонняя гипербола

Парабола

Гипербола и эллипс

Отображение внутренности эллипса на полуплоскость

§ 6. Конформное отображение односвязных областей

Упрощение постановки теоремы Римана

Вспомогательная функция и её основные свойства

Основная лемма

Доказательство предложения Римана

§ 7. Соответствие границ при конформном отображении

Постановка задачи

Доказательство предложения о соответствии границ

§ 8. Отображение на верхнюю полуплоскость прямоугольника и произвольного многоугольника

Прямоугольник

Эллиптическая функция Якоби

Многоугольник

Треугольник

Отображение внешней области многоугольника на верхнюю полуплоскость

Упражнения к гл. XII

Глава XIII

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Проблема коэффициентов

Внутренняя теорема площадей

Внешняя теорема площадей

Верхняя граница для модуля коэффициента при z^2 в разложении однолистной функции
Константа Кёбе

Теорема искажения

Границы для модуля однолистной функции

Теорема вращения

Общая граница для модулей коэффициентов в разложении однолистной функции

Общая граница для модулей действительных коэффициентов в разложении однолистной функции

§ 2. Границы выпуклости и звездообразности

Граница выпуклости

Граница звездообразности

§ 3. Свойства функций, дающих однолистные конформные отображения единичного круга на области специального вида

Звездообразные и выпуклые функции

Верхние границы модулей коэффициентов в разложениях выпуклой и звездообразной функций

§ 4. Экстремальные свойства функции, отображающей область на круг

Лемма

Первая экстремальная проблема

Вторая экстремальная проблема

Алфавитный указатель