

Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Матрицы

Понятие матрицы

Основные операции над матрицами и их свойства

Блочные матрицы

Определители.

Определение определителя

Геометрическое определение знака члена определителя

Основные свойства определителя n -го порядка

Алгебраические дополнения. Формулы разложения определителя по столбцу или строке

Миноры. Связь миноров с алгебраическими дополнениями

Теорема Лапласа

Вычисление определителей

Обратная матрица

Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре

Понятие линейной зависимости вектор-столбцов

Понятие ранга матрицы

Теорема о базисном миноре

Элементарные преобразования матрицы. Вычисление ранга матрицы

Упражнения к главе 1

Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные понятия

Разрешимость системы линейных уравнений.

Теорема Кронекера - Капелли

Квадратные системы уравнений. Формулы Крамера

Число решений произвольной совместной системы

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений (метод последовательного исключения неизвестных)

Системы линейных однородных уравнений

Фундаментальная система решений

Связь между решениями неоднородной и однородной систем уравнений. Общее решение линейной неоднородной системы

Упражнения к главе 2

Глава 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Векторы и линейные операции над векторами

Скалярные и векторные величины

Формальное определение вектора. Равенство векторов

Сложение и вычитание векторов

Умножение вектора на число

Базис и координаты вектора

Линейная зависимость векторов

Признаки линейной зависимости. Понятие векторного пространства. Размерность и базис векторного пространства

Координаты вектора

Условие коллинеарности двух векторов

Аффинные и декартовы координаты точки

Аффинные и декартовы координаты точки на прямой

Аффинные и декартовы координаты точки на плоскости

Аффинные и декартовы координаты точки в пространстве

Ортогональная проекция вектора.

Скалярное произведение векторов

Определение и свойства скалярного произведения

Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей относительно декартова базиса

Ориентация тройки векторов (ориентация пространства)

Векторное произведение

Определение векторного произведения

Выражение векторного произведения через координаты сомножителей относительно декартова базиса

Свойства векторного произведения

Смешанное произведение трех векторов

Двойное векторное произведение

Простейшие задачи аналитической геометрии

Вычисление расстояния между двумя точками

Деление отрезка в данном отношении

Вычисление площади треугольника

Преобразование базиса и системы координат на плоскости и в пространстве

Преобразование базиса на плоскости

Преобразование базиса в пространстве

Преобразование системы координат в пространстве

Преобразование системы координат на плоскости

Упражнения к главе 3

Глава 4. УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Уравнение линии на плоскости. Уравнения линии и поверхности в пространстве

Понятие об уравнении линии на плоскости

Понятие об уравнении поверхности в пространстве

Уравнения линии в пространстве

Алгебраические линии и поверхности

Цилиндрические поверхности

Конические поверхности

Параметрические уравнения линий и поверхностей

Параметрические уравнения линий в пространстве и на плоскости

Параметрические уравнения поверхностей

Упражнения к главе 4

Глава 5. ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Поверхности и линии первого порядка

Уравнение прямой на плоскости. Уравнение плоскости.

Неполные уравнения плоскости

Неполные уравнения прямой на плоскости

Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение прямой на плоскости в отрезках

Нормальное уравнение плоскости. Нормальное уравнение прямой на плоскости

Приведение общих уравнений плоскости и прямой на плоскости к нормальному виду

Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости

Признаки параллельности и перпендикулярности плоскостей. Признаки параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости

Параметрические уравнения плоскости

Параметрические и связанные с ними уравнения прямой в пространстве и на плоскости

Параметрическое уравнение прямой

Канонические уравнения прямой

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом

Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Условия принадлежности прямой к плоскости

Условия принадлежности двух прямых к одной плоскости
Приведение общего уравнения прямой к каноническому виду

Пучок прямых

Связка прямых

Пучок и связка плоскостей

Упражнения к главе 5

Глава 6. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Эллипс

Определение эллипса. Каноническое уравнение эллипса

Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению

Директрисы эллипса

Гипербола

Определение гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы

Исследование формы гиперболы по её каноническому уравнению

Директрисы гиперболы

Парабола

Определение параболы. Каноническое уравнение параболы

Исследование формы параболы по её каноническому уравнению

Уравнения линий второго порядка в полярных координатах

Полярные координаты

Полярные уравнения эллипса и параболы

Полярное уравнение гиперболы

Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе

Уравнения касательных к параболе

Уравнения касательных к эллипсу и гиперболе

Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Инварианты линии второго порядка. Определение типа линии второго порядка по её инвариантам

Упражнения к главе 6

Глава 7. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Эллипсоиды

Гиперболоиды

Однополостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид

Параболоиды

Эллиптический параболоид

Гиперболический параболоид

Цилиндры второго порядка

Конус второго порядка

Поверхности вращения

Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида

Касательные к поверхностям второго порядка.

Касательная плоскость

Упражнения к главе 7

Глава 8. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Множества и подмножества

Множества и подмножества

Операции над множествами

Бинарные отношения

Определение бинарного отношения

Отношения порядка

Отношения эквивалентности. Фактор-множество

Отображения

Алгебраические операции (законы композиции)

Группы

Кольца

Поле

Комплексные числа

Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексная плоскость. Тригонометрическая форма комплексного числа

Показательная форма комплексного числа

Основная теорема алгебры

Кольцо многочленов

Основная теорема алгебры

Следствия из основной теоремы алгебры

Упражнения к главе 8

Глава 9. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение линейного пространства

Линейная зависимость векторов. Размерность линейного пространства. Базис и координаты вектора

Линейная зависимость векторов

Размерность линейного пространства

Базис линейного пространства и координаты вектора.

Изоморфизм конечномерных линейных пространств

Преобразование базисов. Преобразование координат векторов

Подпространства линейного пространства

Определение линейного подпространства. Линейная оболочка

Задание линейных подпространств системами линейных однородных уравнений

Линейные многообразия

Пересечение и сумма линейных подпространств

Пересечение и сумма линейных подпространств

Прямая сумма линейных подпространств

Прямое дополнение. Размерность суммы линейных подпространств

Упражнения к главе 9

Глава 10. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение точечно-векторного пространства. Система координат в точечно-векторном пространстве

Определение точечно-векторного пространства

Преобразование базиса и преобразование системы координат в пространстве V_n

Плоскости в пространстве V_n

K -мерная плоскость

Прямая и отрезок прямой

Гиперплоскость

Выпуклые множества

Определение выпуклого множества

Полупространства

Выпуклые оболочки

Упражнения к главе 10

Глава 11. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Основные понятия

Определение евклидова пространства

Нормированное пространство. Длина (норма) вектора

Угол между векторами. Понятие ортогональности.

Теорема Пифагора

Расстояние

Ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства

Определение ортонормированного базиса и теорема существования

Свойства ортонормированного базиса

Ортогональное дополнение

Проектирование вектора на подпространство

Изоморфизм конечномерных евклидовых пространств

Унитарные пространства

Упражнения к главе 11

Глава 12. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение линейного оператора и основные свойства

Определение линейного оператора

Сложение и умножение на число. Линейное пространство операторов

Произведение операторов

Ранг и дефект линейного оператора

Невырожденные операторы. Обратный оператор

Матрица линейного оператора

Матрица линейного оператора в заданном базисе пространства

Связь действий над операторами с действиями над матрицами

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Матрица линейного оператора, действующего из X в Y

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение и основные свойства

Характеристическое уравнение и характеристический многочлен

Нахождение собственных векторов

Операторы простой структуры

Инвариантные подпространства.

Индукцированный оператор

Инвариантные подпространства

Индукцированный оператор

Операторный многочлен

Треугольная форма матрицы оператора

Упражнения к главе 12

Глава 13. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА

Нильпотентные операторы

Канонический базис нильпотентного оператора

Приведение матрицы оператора к канонической жордановой форме

Упражнения к главе 13

Глава 14. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Сопряженный оператор

Нормальные операторы

Унитарный оператор

Самосопряженный (эрмитов) оператор

Полярная форма и сингулярное разложение

Операторы AA^c и A^cA

Сингулярные базисы

Полярное разложение оператора

Экстремальные свойства собственных значений

Норма оператора

Экстремальные свойства собственных значений самосопряженного оператора

Упражнения к главе 14

Глава 15. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Линейные формы

Билинейные формы

Определение. Общий вид билинейной формы в конечномерном пространстве

Преобразование матрицы билинейной формы при изменении базиса
Эрмитовы билинейные формы
Квадратичные формы
Приведение квадратичной формы к каноническому виду
Канонический вид квадратичной формы
Метод Лагранжа
Метод Якоби
Закон инерции квадратичных форм
Знакоопределенные квадратичные формы
Классификация квадратичных форм
Матрица Грама
Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы
Билинейные и квадратичные формы на унитарном пространстве
Связь между билинейными формами и линейными операторами
Приведение эрмитовой квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе
Одновременное приведение к каноническому виду двух квадратичных форм в вещественном линейном пространстве
Гиперповерхности второго порядка
Определение гиперповерхности второго порядка
Совместное расположение прямой и гиперповерхности
Центр симметрии гиперповерхности
Приведение уравнения гиперповерхности второго порядка к каноническому виду
Поверхности второго порядка
Упражнения к главе 15
Дополнительная литература
Ответы к упражнениям